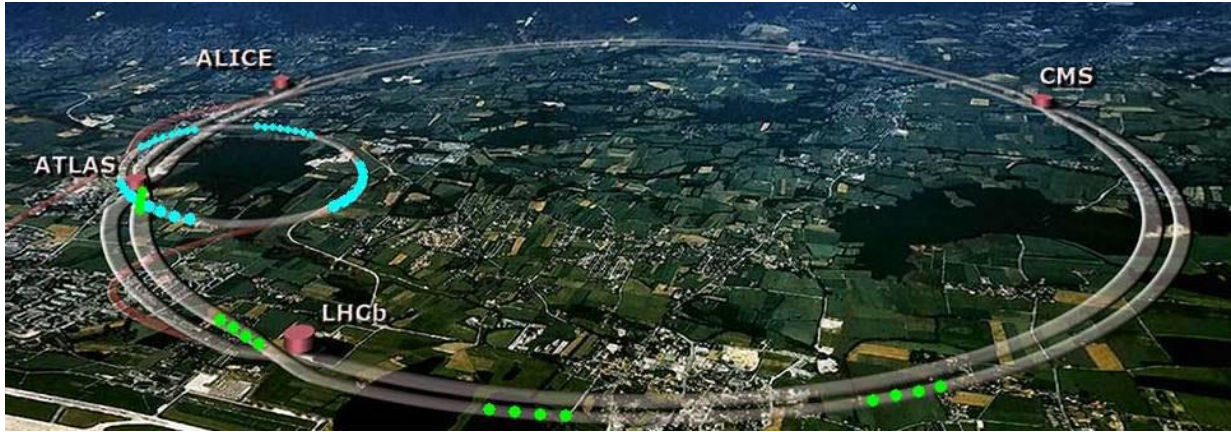

Chapitre M5 – Mouvement des particules chargées

Le LHC (Large Hadron Collider) est un accélérateur de particules mis en fonction en 2008 et situé dans la région frontalière entre la France et la Suisse. L'anneau principal fait environ 4,25 km de rayon. Des protons y sont accélérés à une vitesse de $0,999\,999\,991 \times c$, soit seulement $2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ plus lent que la vitesse de la lumière. Lorsque des protons entre en collision, l'énergie libérée par le choc permet de créer de nouvelles particules ($\mathcal{E} = mc^2$), et donc d'étudier les propriétés de la matière à l'échelle subatomique.



Dans ce cours, nous allons étudier le comportement des particules chargées dans un champ électrique et un champ magnétique. Nous nous plaçons dans la limite non relativiste ($v \ll c$).

I) Champ électrique

1) Source

Un champ électrique, noté \vec{E} , est créé par la présence de charges électriques.

Lorsque \vec{E} dépend que d'une seule variable (par exemple x), on définit le **potentiel électrostatique** noté V :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x} \quad \text{marche avec } x, y, z, r$$

Remarque : c'est pour cela que V est toujours défini à une constante près.

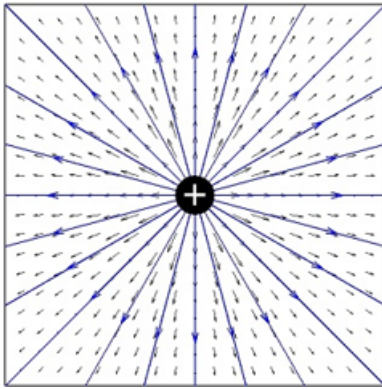
Ordre de grandeur :

| Source | Champ faible | Condensateur TP | Rigidité diélectrique de l'air |
|---------------------------------------|--------------|-----------------|--------------------------------|
| E en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ | < 1 | 10^2 à 10^4 | 10^6 |

2) Cartes de champ

Propriétés :

- Le champ électrique est tangent aux lignes de champ.
- Les équipotentiels sont toujours orthogonaux aux lignes de champ.
- Lorsque les lignes de champ se resserrent, le champ s'intensifie, et vice-versa. Les lignes de champ régulièrement espacées correspondent donc à un champ uniforme.
- Lorsque deux lignes de champ se croisent, le champ au niveau du croisement est nul.
- Les équipotentiels sont toujours orthogonaux aux lignes de champ.

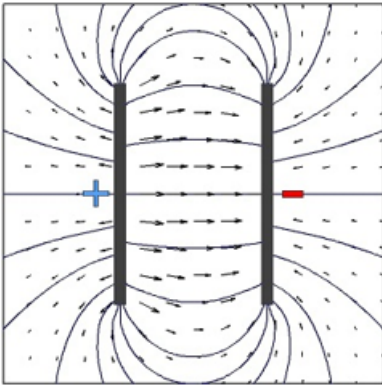


Charge ponctuelle

On admet pour cette année que le champ électrique créé par une charge ponctuelle Q vaut :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Avec : $\epsilon_0 = 9,0 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide.



Condensateur plan

On note $U = V_+ - V_-$ la différence de potentielle entre les armatures.

On remarque que le champ est uniforme (E constant donc V affine) entre les armatures. On a donc :

$$V(x) = V_+ + \frac{V_- - V_+}{d} x = V_+ - \frac{U}{d} x$$

On en déduit l'expression de \vec{E} :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x = \frac{U}{d} \vec{u}_x$$

3) Force de Lorentz

Une particule de charge ponctuelle q dans un champ \vec{E} subit la **force de Lorentz** (partie électrique) :

$$\vec{F}_L = q\vec{E}$$

Propriété :

Les forces de gravitation sont toujours négligeables devant la force de Lorentz.

◦ Comparaison avec le poids : exemple du proton

$$\frac{F_L}{P} = \frac{eE}{mg} \sim \frac{10^{-19} \times 10^4}{10^{-27} \times 10} \sim 10^{11} \gg 1$$

◦ Intersection entre deux protons :

$$\frac{F_L}{F_g} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}{\frac{Gm^2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sim \frac{1}{10 \times 10^{-11} \times 10^{-10}} \times \left(\frac{10^{-19}}{10^{-27}}\right)^2 \sim 10^{36} \gg 1$$

Propriété :

Cette force dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F}_L = q\vec{E} \Rightarrow -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -q\frac{dV}{dx} \text{ avec : } \mathcal{E}_p = qV + cte$$

L'énergie des particules est souvent donnée en électronvolt.

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

De cette manière, un proton (charge $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$) soumis à un potentiel $V = 10 \text{ V}$ possède une énergie potentielle $\mathcal{E}_p = 10 \text{ eV}$.

4) Détermination d'une vitesse de sortie

On considère une particule de charge q soumise à une différence de potentiel U . On note :

- En $x = 0$: V_0 le potentiel et v_0 la vitesse.
- En $x = d$: V_1 le potentiel et v_1 la vitesse.
- $U = V_1 - V_0$ la différence de potentiel.

Déterminons v_1 . On applique le TEM à charge q entre $x = 0$ et $x = d$ dans un référentiel galiléen. Le système est soumis uniquement à la force de Lorentz, conservative.

$$\Delta \mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m(x=0) = \mathcal{E}_m(x=d) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2qU}{m}}$$

Il faut donc que $qU < 0$ pour accélérer la particule.

5) Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

On se place dans un référentiel galiléen. Soit une particule de charge q soumise à un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_z$.

Le PFD donne :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

On se trouve dans le cas d'un mouvement à vecteur accélération constant. La trajectoire est donc une parabole (cf. chapitre M1).

Prenons comme conditions initiales : particule sur l'origine avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0(\cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_z)$

$$\vec{a} = \frac{qE}{m}\vec{u}_z \quad \text{avec :} \quad \vec{v} = \frac{qEt}{m}\vec{u}_z + \vec{v}_0 \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{\text{OM}} = \frac{qEt^2}{2m}\vec{u}_z + \vec{v}_0t$$

On projette sur les trois axes :

$$\begin{cases} x(t) = v_0t \cos(\alpha) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{qEt^2}{2m} + v_0t \sin(\alpha) \end{cases}$$

Trajectoire :

$$z(x) = \frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + x \tan(\alpha)$$

Il s'agit d'une parabole dont le sens dépend du signe de qE .

II) Champ magnétique

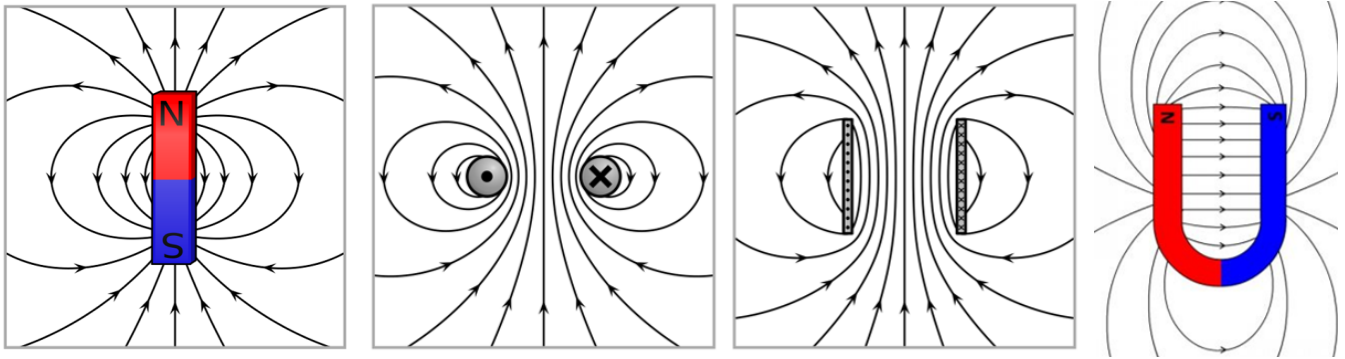
1) Source

Un champ magnétique, noté \vec{B} , est créé par la présence de courants électriques (des charges en mouvement).

Ordre de grandeur :

| Source | Champ terrestre | Aimant usuel | IRM |
|----------|--------------------|--------------|-----|
| B en T | 5×10^{-5} | 0,1 à 1 | 5 |

2) Cartes de champ



Propriétés :

Pour les aimants, les lignes de champ sont orientées du Nord vers le Sud.

Pour les circuits, les lignes de champ sont orientées dans le sens donné par la main droite. Pour la spire et pour le solénoïde, on peut ainsi définir un pôle Nord et un pôle Sud.

Une bobine et un aimant en U permettent de générer des champs magnétiques uniformes.

3) Force de Lorentz

Une particule de charge ponctuelle q dans un champ \vec{B} subit la **force de Lorentz** (partie magnétique) :

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Propriété :

Le **produit vectoriel** est une opération qui prend deux vecteurs et qui renvoie le vecteur de norme :

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times |\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))|$$

et dirigé selon la règle de la main droite.

On remarque en particulier que le **produit vectoriel est nul si les vecteurs sont colinéaires**.

Le produit vectoriel est une opération **linéaire** et **antisymétrique** :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \quad \text{et} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Le produit vectoriel s'écrit également en fonction des coordonnées des vecteurs de la manière suivante :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Propriété :

La puissance de la force de Lorentz magnétique est nulle :

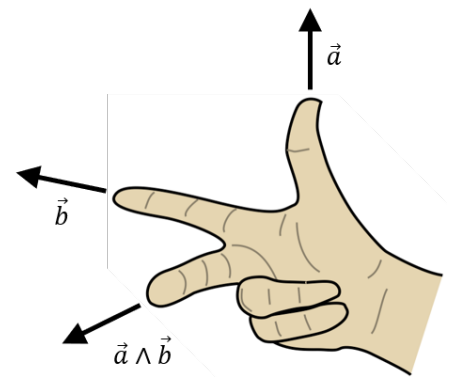
$$\mathcal{P}(\vec{F}_L) = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = \underbrace{(q \vec{v} \wedge \vec{B})}_{\perp \vec{v}} \cdot \vec{v} = 0$$

En conséquence, le TPC affirme que la force de Lorentz magnétique ne peut pas modifier l'énergie cinétique de la particule (donc v), mais elle peut courber la trajectoire (la direction de \vec{v}).

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_c = cte \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = cte}$$

Propriété :

Les forces de gravitation sont toujours négligeables devant la force de Lorentz.



◦ Comparaison avec le poids : exemple du proton

$$\frac{F_L}{P} \sim \frac{qvB}{mg} \sim \frac{10^{-19} \times 10^3 \times 1}{10^{-27} \times 10} \sim 10^{10} \gg 1$$

4) Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

On se place dans un référentiel galiléen. Soit une particule de charge q soumise à un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On suppose de plus que la vitesse initiale est orthogonal au champ : $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$

PFD :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la trajectoire dans un plan $\perp \vec{B}$:

$$\ddot{z}(t) = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = 0 \Rightarrow \boxed{z(t) = 0}$$

On sait également que le mouvement est uniforme :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_L) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_c = cte \Rightarrow \boxed{v = cte = v_0}$$

Hypothèse : on suppose que la trajectoire est circulaire de rayon R

Or, pour une trajectoire circulaire uniforme, on a :

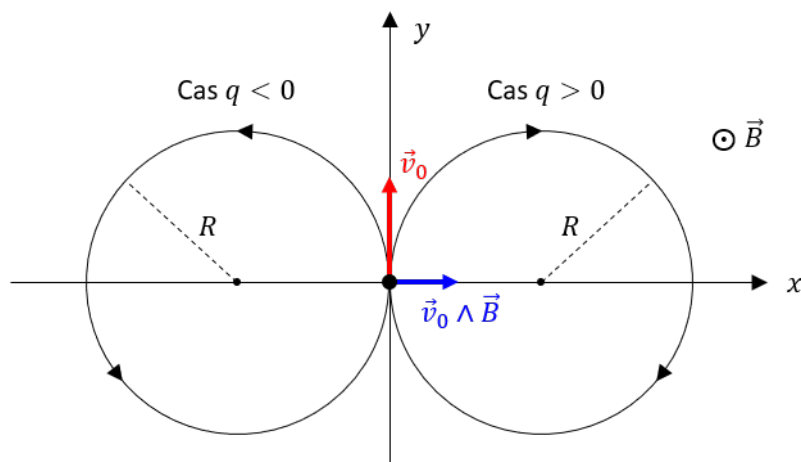
$$\vec{OM} = R\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \underbrace{R\omega}_{=v_0} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_r = -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r$$

Un PFD donne donc :

$$-\frac{mv_0^2}{R} \vec{u}_r = q\vec{v} \wedge \vec{B} \xrightarrow[\text{norme}]{} \frac{mv_0^2}{R} = |q|v_0B \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$$

Le fait qu'il existe un rayon R valide l'hypothèse de mouvement circulaire.

Finalement, le sens de parcours (horaire ou trigonométrique) se détermine grâce à la direction de la force à l'instant initiale.



On peut alors définir la vitesse angulaire de la particule, appelée **pulsation cyclotron** :

$$v_0 = R\omega_c \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{v_0}{R} = \frac{|q|B}{m}}$$